# Corrigé des exercices de Nombres Complexes en Groupe :

Groupe $B_1$ : Nezihe/Sidi
Deich/Bahnein
Roughaye/Cheikh/Diappo

$7^e C_1$

Exercice 2

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

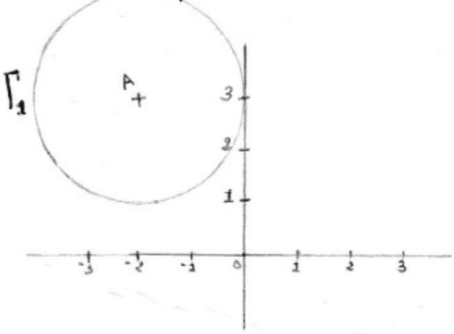
1. $|z+2-3i| = 2$
2. $|z+4+3i| = |z-3-4i|$
3. $\left|\frac{z+2-3i}{iz-1-i}\right| = 1$
4. $|z+2-3i| = |\bar{z}+2i|$
5. $|(1-i)z-2i| = |(1+i)z-4-4i|$
6. $\left|\frac{z+1+2i}{z-3i}\right| = 3$

1/ $|z+2-3i| = 2$

On pose : $z_A = -2+3i \Rightarrow |z-z_A| = 2$

$M \in \Gamma_1 \Rightarrow AM = 2 \Rightarrow \Gamma_1 = \mathcal{C}_{(A,2)}$

avec $A(-2;3)$

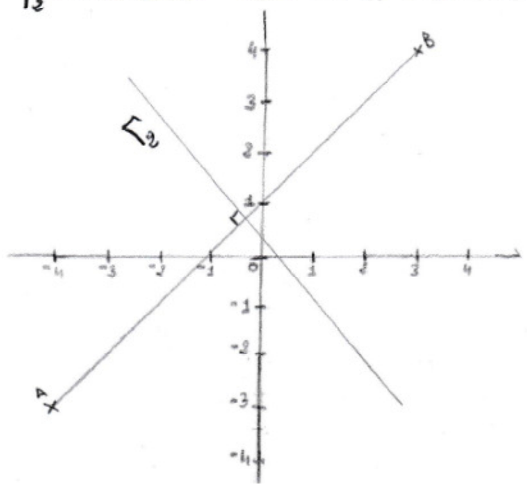



2/ $|z+4+3i| = |z-3-4i|$

On pose : $z_A = -4-3i$ ; $z_B = 3+4i$

$M \in \Gamma_2 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow MA = MB$

$\Gamma_2$ : med $[AB]$ avec $A(-4;-3)$ et $B(3;4)$




3/ $\left|\frac{z+2-3i}{iz-1-i}\right| = 1 \Rightarrow |z+2-3i| = |iz-1-i|$

$\Rightarrow |z+2-3i| = |i|z-\frac{1}{i}-1|$

$\Rightarrow |z+2-3i| = |i||z+i-1|$

$\Rightarrow |z+2-3i| = |z+i-1|$

On pose : $z_A = -2+3i$ et $z_B = 1-i$

$\Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow MA = MB$

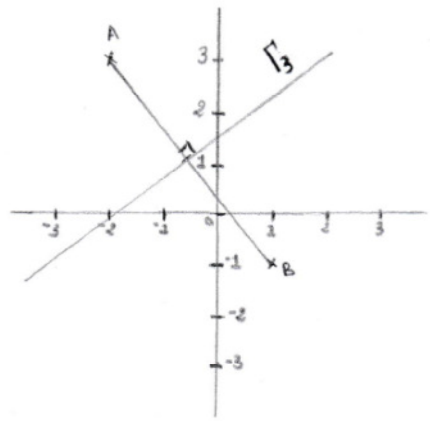
$\Gamma_3$ : med $[AB]$ avec $A(-2;3)$ et $B(1;-1)$

$\underline{\underline{2^e \text{ methode}}}$ :

$\left|\frac{z+2-3i}{iz-1-i}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|z+2-3i|}{|i||z-1+i|} = 1$

On pose : $z_A = -2+3i$ et $z_B = 1-i \Rightarrow \frac{MA}{MB} = 1$

$\Rightarrow MA = MB \Rightarrow \Gamma_3$ : med $[AB]$ avec $A(-2;3)$ et $B(1;-1)$



4/ $|z+2-3i| = |\bar{z}+2i|$

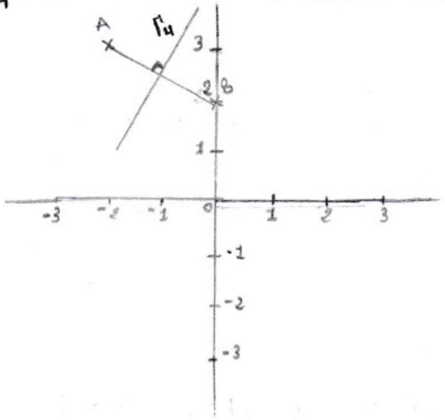
$|z+2-3i| = |\overline{z-2i}|$

$|z+2-3i| = |z-2i|$

On pose : $z_A = -2+3i$ et $z_B = 2i$

$\Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow MA = MB$

$\Gamma_4$ : med [AB] avec $A(-2;3)$ et $B(0;2)$




5/ $|(1-i)z-2i| = |(1+i)z-4-4i|$

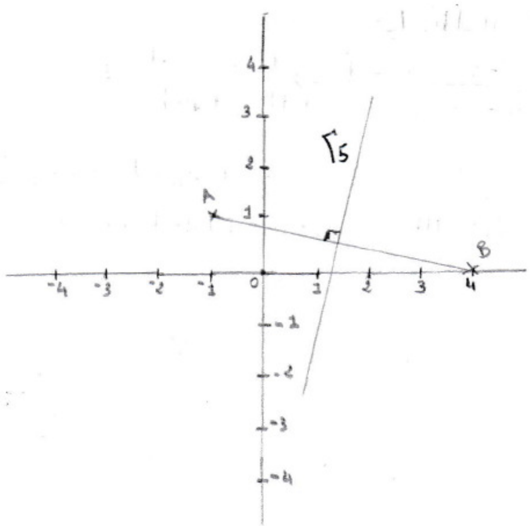
$|(1-i)(z+1-i)| = |(1+i)(z-4)|$

$\sqrt{2}|(z+1-i)| = \sqrt{2}|(z-4)|$

On pose : $z_A = -1+i$ et $z_B = 4$

$\Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Rightarrow MA = MB$

$\Gamma_5$ : med [AB] avec $A(-1;1)$ et $B(4;0)$




6/ $\left|\dfrac{z+1+2i}{z-3i}\right| = 3$

On pose : $z_A = -1-2i$ et $z_B = 3i$

$\dfrac{MA}{MB} = 3 \Rightarrow \dfrac{MA^2}{MB^2} = 9 \Rightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$

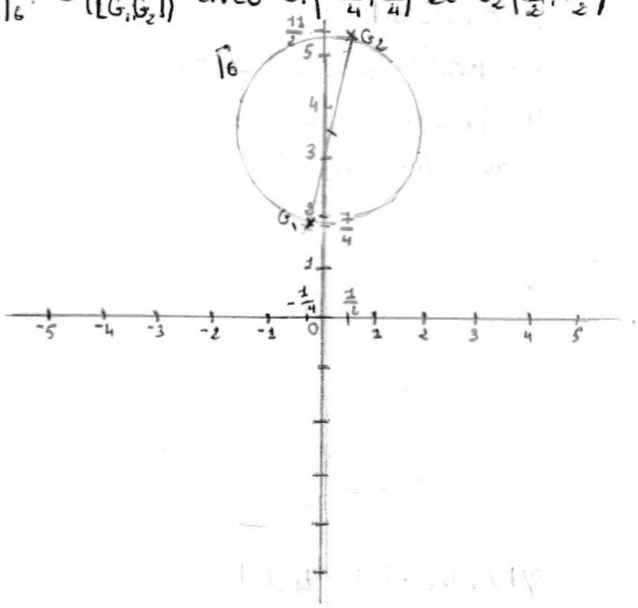
$(\vec{MA} + 3\vec{MB})(\vec{MA} - 3\vec{MB}) = 0$

$G_1 = \text{bar} \begin{array}{|c|c} A & B \\ \hline 1 & 3 \end{array}$ $\qquad$ $G_2 = \text{bar} \begin{array}{|c|c} A & B \\ \hline 1 & -3 \end{array}$

$z_{G_1} = \dfrac{-1-2i+9i}{4} = \dfrac{-1+7i}{4} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{4}i$

$z_{G_2} = \dfrac{-1-2i-9i}{-2} = \dfrac{1+11i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{11}{2}i$

$\Gamma_6$ : $\mathcal{C}_{([G_1G_2])}$ avec $G_1\left(-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$ et $G_2\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$



# Corrigé des exercices de Nombres Complexes en Groupe:

Groupe $B_1$: Nezihe/Sidi
Deich/Bahnein
Roughaye/Cheikh/Diallo

$7^{e}C_1$

**Exercice 5**

Déterminer suivant les valeurs de $\theta$ ($\theta \in [0;2\pi[$) le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivant:

$z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$, $z_2 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$, $z_3 = 1+\sin\theta - i\cos\theta$, $z_4 = 1 + i\tan\theta$,

$z_5 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$, $z_6 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$

1/ $Z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$

$= \cos\theta + i + i\sin\theta$

$= \cos\theta + i\sin\theta + i = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= 2\cos\dfrac{\theta - \pi/2}{2} \cdot e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$

* Si $2\cos\dfrac{\theta - \pi/2}{2} \geq 0$

$\Rightarrow |Z_1| = 2\cos\dfrac{\theta - \pi/2}{2}$ ; $\arg Z_1 = \theta + \dfrac{\pi}{2}$

* Si non

$|Z_1| = -2\cos\dfrac{\theta - \pi/2}{2}$ ; $\arg Z_1 = \theta + \dfrac{\pi}{2}$

2/ $Z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

$= e^{i0} + e^{i\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$

$|Z_2| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ $\quad \theta \in ]-\pi;\pi]$

$\arg Z_2 = \dfrac{\theta}{2}$

3/ $1 + \sin\theta - i\cos\theta = 1 - i(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 1 - ie^{i\theta}$

$= 1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\theta}$

$Z_3 = e^{i0} + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$

$= 2\cos\left(\dfrac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right)}$

$= 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

Si $2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$; alors

$\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$k = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2} \in [0;2\pi[$

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\theta}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
| $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ |
| $\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\lvert Z_3 \rvert$ | $2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$ | | | $0$ | $-2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$ |
| $\arg(Z_3)$ | $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$ | | | | $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi$ |

Conclusion:

Si $\theta \in [0; \frac{3\pi}{2}[$ : $|Z_3| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

et $\arg(Z_3) = \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}$

Si $\theta = \frac{3\pi}{2}$ : $|Z_3| = 0$, pas d'argument

Si $\theta \in ]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$ : $|Z_3| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

et $\arg(Z_3) = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{3\pi}{2}$

4/ $Z_4 = 1 + i\tan\theta = 1 + \frac{i\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}$

$\Rightarrow Z_4 = \frac{1}{\cos\theta} \cdot e^{i\theta}$

$\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$ ; $\cos\theta > 0$

$\theta \in ]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ ; $\cos\theta < 0$

$\theta \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ ; $\cos\theta = 0$

| $\theta$ | $0$    $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{\cos\theta}$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $\lvert Z_4\rvert$ | $\frac{1}{\cos\theta}$ | $-\frac{1}{\cos\theta}$ | $\frac{1}{\cos\theta}$ |
| $\arg Z_4$ | $\theta$ | $\pi + \theta$ | $\theta$ |

5/ $Z_5 = \frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}(1+e^{-i\theta})}$

$= \frac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})}{e^{i\theta}+1} = e^{i\theta}$ $(\text{si } e^{i\theta} \neq -1)$

Conclusion:

$\theta = \pi$, $Z$ n'existe pas

$\theta \in [0; \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$ ; $Z = e^{i\theta}$
donc $|Z_5| = 1$ ; $\arg Z_5 = \theta$

6/
$Z_6 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ ; $\theta \notin [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

$Z_6 = \frac{1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$

$= \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i2\theta}$

Si $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ ; $Z_6$ n'existe pas

Si $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[ \cup ]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$
alors $|Z| = 1$ et $\arg Z = 2\theta$

(2)

# Corrigé des exercices de Nombres Complexes en Groupe $7^e C_1$

Groupe $B_1$ : Nezihe/Sidi
Deich/Bahnein
Roughaye/Cheikh/Diallo

**Exercice 8**

**Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante:**

$$10z^4-(39-3i)z^3+60z^2-(39-3i)z+10=0 \text{ ; ( On pose } Z=z+\frac{1}{z}\text{).}$$

(E): $10z^4-(39-3i)z^3+60z^2-(39-3i)z+10=0$

(On pose $Z=z+\frac{1}{z}$)

$aZ^2+bZ+c=0$

$a\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+b\left(z+\frac{1}{z}\right)+c=0$

$a\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2+b\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+c=0$

$a\left(\frac{z^4+2z^2+1}{z^2}\right)+b\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+c=0$

$\frac{az^4+2az^2+a}{z^2}+\frac{bz^2+b}{z}+c=0$

$az^4+2az^2+a+bz^3+bz+cz^2=0$

$az^4+bz^3+(2a+c)z^2+bz+a=0$

Par identification:

$a=10;\ b=-(39-3i);\ 2a+c=60$

$\Rightarrow c=40$

$\Rightarrow 10Z^2+(-39+3i)Z+40=0$

$\Delta=(39-3i)^2-4(10)(40)$

$\Delta=-88-234i$

$\delta=9-13i$

$Z_1=\frac{39-3i+9-13i}{20}=\frac{12}{5}-\frac{4}{5}i$

$Z_2=\frac{39-3i-9+13i}{20}=\frac{15}{10}+\frac{5}{10}i$

$=\frac{3+i}{2}$

Si $Z=Z_1 \Rightarrow Z_1=z+\frac{1}{z}$

$\Rightarrow \frac{z^2+1}{z}=\frac{12-4i}{5}$

$5z^2+5=12z-4iz$

$5z^2-(12-4i)z+5=0$

$\Delta=(12-4i)^2-4(5)(5)$

$\Delta=144-96i-16-100$

$\Delta=28-96i$

$\delta=8-6i$

$z_1=\frac{12-4i+8-6i}{10}=\frac{20-10i}{10}=2-i$

$z_2=\frac{12-4i-8+6i}{10}=\frac{4+2i}{10}=\frac{2+i}{5}$

Si $Z=Z_2 \Rightarrow Z_2=z+\frac{1}{z} \Rightarrow \frac{z^2+1}{z}=\frac{3+i}{2}$

$2z^2+2=3z+iz \Rightarrow 2z^2-(3+i)z+2=0$

$\Delta=(3+i)^2-4(2)(2)$

$\Delta=9+6i-1-16$

$\Delta=-8+6i$

$\delta=1+3i$

$z_3=\frac{3+i+1+3i}{4}=\frac{4+4i}{4}=1+i$

$z_4=\frac{3+i-1-3i}{4}=\frac{2-2i}{4}=\frac{1-i}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E): $10z^4-(39-3i)z^3+60z^2-(39-3i)z+10=0$ :

$S=\left\{\left(2-i;\ \frac{2+i}{5};\ 1+i;\ \frac{1-i}{2}\right)\right\}$

Groupe $B_1$ : Nezihe/Sidi
Deich/Bathnein
Roughaye/Cheikh/Diallo

Corrigé des exercices en groupe :

$7^e C_1$

Exercice 11

Simplifier les expressions suivantes:

1) $C_n = 1+\cos x+\cos 2x+\cdots\cos nx$
$S_n = \sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx$ ; (On pourra calculer $C_n + iS_n$)

2) $C_n = \cos^2 x + \cos^2 x\cos 2x+\cdots+\cos^n x\cos nx$
$S_n = \cos x\sin x + \cos^2 x\sin 2x+\cdots+\cos^n x\sin nx$ ; (On pourra calculer $C_n + iS_n$)

1) $C_n = 1+\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx$

$S_n = \sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx$

$C_n + iS_n = 1+(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x + i\sin 2x+\dots+(\cos nx+i\sin nx)$

$= 1+e^{ix}+e^{i2x}+\dots+e^{inx}$

C'est une S.G de raison $q=e^{ix}$ et de $1^{er}$ terme 1.

Si $q=1 \iff e^{ix}=1 \iff x=0$

$$\begin{cases} C_n = 1+\underbrace{\cos 0+\cos 2\times 0+\dots+\cos n\times 0}_{n \text{ fois}} = 1+n \\ S_n = 0 \end{cases}$$

Si $q\neq 1$

$\iff C_n + iS_n = \dfrac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}$

$\iff \dfrac{e^{i0}-e^{i(x(n+1))}}{e^{i0}-e^{ix}}$

$\iff \dfrac{2i\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)e^{i\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}}$

$\iff C_n+iS_n = \dfrac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)\cdot e^{i\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{i\left(\frac{x}{2}\right)}}$

$= \dfrac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)\cdot e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)}}{\sin\frac{x}{2}}$

$= \dfrac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)$

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \\ S_n = \dfrac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \end{cases}$$

2) $C_n = \cos^2 x+\cos^2 x\cos 2x+\dots+\cos^n x\cos nx$

$S_n = \cos x\sin x+\cos^2 x\sin 2x+\dots+\cos^n x\sin nx$

Calculons $C_n+iS_n$

$C_n+iS_n = (\cos^2 x+\cos x\, i\sin x)+(\cos^2 x\sin 2x)+\cos^2 x\sin 2x+\cos^n x\sin x$

$\Rightarrow C_n+iS_n = \cos x(\cos x+i\sin x)+\dots\cos^n x(\cos nx+i\sin nx)$

$= \cos x\, e^{ix}+\dots+\cos^n x\, e^{inx}$

$C_n+iS_n = \dfrac{1-(\cos x\, e^{ix})^n}{1-\cos x\, e^{ix}}\times\cos x\, e^{ix}$

avec: $\cos x\, e^{ix} = \frac{1}{2}(2\cos x\, e^{ix}) = \frac{1}{2}(1+e^{i2x})$

$1+e^{i2x} = e^{i0}+e^{i2x} = 2\cos\frac{2x}{2}\, e^{i\frac{2x}{2}}$
$= 2\cos x\, e^{ix}$

donc :

$C_n+iS_n = \frac{1}{2}(1+e^{i2x})\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n(1+e^{i2x})^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)(1+e^{i2x})}\right]$

Corrigé des exercices en groupe :

Groupe $B_1$ : Nezihe/Sidi
Deich/Bahnein
Roughaye/Cheikh/Diallo

$7^e C_1$

**Exercice 14**

Soient ABC et AB'C' deux triangles directs rectangles isocèles en A. Soient a,b,c,a',b' les affixes respectives des points A,B,C,B',C'.
1) Exprimer c et c' en fonction de a , b et b'.
2) Montrer que $BB' = CC'$ et $(BB') \perp (CC')$.

1) * ABC rectangle isocèle directs :

$$\frac{c-a}{b-a} = i$$

$$c - a = i(b-a)$$

$$c = a + i(b-a)$$

$$c = ib + a(1-i)$$

* AB'C' rectangle isocèle directs :

$$\frac{c'-a}{b'-a} = i$$

$$c' - a = i(b'-a)$$

$$c' = a + i(b'-a)$$

$$c' = ib' + a(1-i)$$

2) Montrons que :
$BB' = CC'$ et $(BB') \perp (CC')$

$$\frac{c'-c}{b'-b} = \frac{ib'+a(1-i)-ib-a(1-i)}{b'-b}$$

$$= \frac{ib'-ib}{b'-b} = \frac{(b'-b)i}{b'-b} = i$$

donc $BB' = CC'$ et $(BB') \perp (CC')$

Groupe B1: Nezihe/Sidi ; Deich/Bahnein
Roughaye/Cheikh/Diallo — 7e C1

**Exercice 17**

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit $f_a$ l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (a+\frac{1}{2}i)z + 4 - 4a - 2i, \qquad a \in \mathbb{C}$$

1) Reconnaître l'application $f_a$ et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a) $a = 1 - \frac{1}{2}i$ b) $a = 2 - \frac{1}{2}i$ c) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a = \frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a \in \mathbb{R}$ et on note $\theta = \arg(a+\frac{1}{2}i)$. Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(4;0)$. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on pose $M_{n+1} = f_a(M_n)$. On note $z_n$ l'affixe du point $M_n$.

a) Calculer et écrire sous forme algébrique : $z_1$ et $z_2$ en fonction de a.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 4 - (a+\frac{1}{2}i)^n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = |z_n - 4|$. Pour quelles valeurs de $\theta$ ; la suite $(V_n)$ est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de n : $d_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$ où $d_n = M_nM_{n+1}$

e) Pour $a = \frac{1}{2}$ ; déterminer la nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$. Placer les points $M_0$ ; $M_1$ et $M_2$. Calculer $S_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ puis interpréter géométriquement.

$Z' = (a + \frac{1}{2}i)z + 4 - 4a - 2i$ ; $a \in \mathbb{C}$

1) a) $a = 1 - \frac{1}{2}i$

$\Rightarrow Z' = (1 - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i)z + 4 - 4(-\frac{1}{2}i + 1) - 2i$

$\Rightarrow Z' = z + 4 + 2i - 4 - 2i$

$\Rightarrow Z' = z$ Identité du plan

b) $a = 2 - \frac{1}{2}i$

$\Rightarrow Z' = 2z - 4$

homothétie de rapport $k=2$, de centre $\Omega(4;0)$

c) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow Z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z + 4 - 2\sqrt{3} - 2i$

rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$, de centre $\Omega(4;0)$

d) $a = \frac{1}{2} \Rightarrow Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z) + 2 - 2i$

Similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre $\Omega(0;4)$

2) $M_0(3;0)$ ; $\Omega(4;0)$

$M_{n+1} = f_a(M_n)$ $\theta = \arg(a + \frac{1}{2}i)$

a) $Z_1 = f_a(Z_0) = 3(a + \frac{1}{2}i) + 4 - 4a - 2i$

$= 4 - a - \frac{1}{2}i$

• $Z_2 = f_a(Z_1) = (a + \frac{1}{2}i)(4 - a - \frac{1}{2}i) + 4 - 4a - 2i$

$= 4a - a^2 - \frac{1}{2}ai + 2i - \frac{1}{2}ai + \frac{1}{4} + 4 - 4a - 2i$

$= \frac{17}{4}a - a^2 - ai$

b) $Z_1 = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^1$

$Z_2 = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^2$

Supposons que $Z_n = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^n$

Calculons $Z_{n+1}$

$Z_{n+1} = (a + \frac{1}{2}i)Z_n + 4 - 4a - 2i$

$= 4(a + \frac{1}{2}i) - (a + \frac{1}{2}i)^{n+1} + 4 - 4a - 2i$

$= 4 - (a + \frac{1}{2}i)^{n+1}$

1

$\Rightarrow Z_n = 4 - (a + \frac{1}{2}i)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

c) $V_n = |Z_n - 4| = |a + \frac{1}{2}i|^n$
$= |\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \cdot e^{i\theta}|^n$

$= |(\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}})^n \cdot e^{in\theta}|$

$= \left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}\right)^n$

$V_n$ est une suite geometrique de $1^{er}$ terme $|Z_0 - 4i| = |-1| = 1$ et de raison $q = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$

Pour que $(V_n)_n$ converge il faut que

$\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \leq 1$

$a^2 + \frac{1}{4} \leq 1$

$a^2 \leq \frac{3}{4}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta \in [\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$

d) $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$ ; $d_n = M_n M_{n+1}$

$d_n = |Z_{n+1} - Z_n|$

$\Rightarrow d_n = |(a + \frac{1}{2}i)^n - (a + \frac{1}{2}i)^{n+1}|$

$= |(a + \frac{1}{2}i)^n (1 - a - \frac{1}{2}i)|$

$= \left(\sqrt{(a + \frac{1}{2})^n}\right)\left(\sqrt{a^2 - 2a + \frac{5}{4}}\right) = V_n \cdot \sqrt{a^2}$

$S_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n$

$= \sqrt{a^2 - 2a + \frac{5}{4}} \, (V_0 + V_1 + \dots + V_n)$

$= \sqrt{a^2 - 2a + \frac{5}{4}} \left(\frac{1 - (\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}})^{n+1}}{1 - \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}}\right)$

2) Pour $a = \frac{1}{2}$

$\arg\left(\frac{Z_{n+1} - \Omega}{Z_n - \Omega}\right) = \arg\left(\frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{n+1}}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

$\arg\left(\frac{\Omega - Z_n}{Z_{n+1} - Z_n}\right) = \arg\left(\frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)}\right) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$\Omega M_n M_{n+1}$ est rectangle isocèle en $M_{n+1}$

$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$

$= 1 + \sqrt{2}$

Groupe $B_1$ : Nezihe/Sidi
Deich/Bahnein
M-Roughaye/Cheikh/Diallo

$7^e C_1$

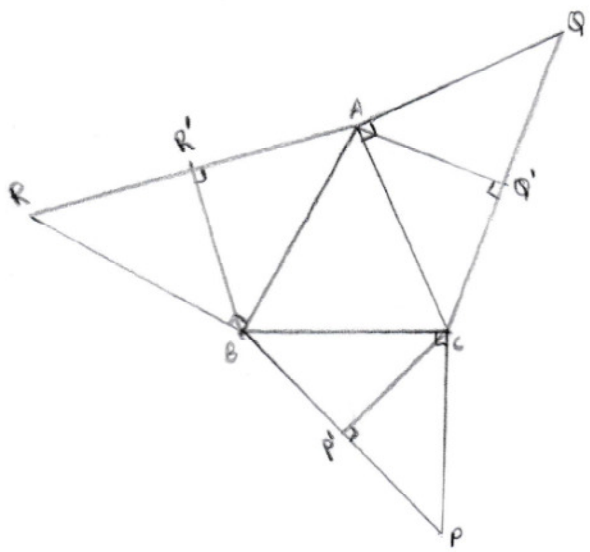
Exercice 20 Bac

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP], [CQ] et [AR].

L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles ABC, PQR et P'Q'R' sont de même centre de gravité. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient $a, b, c, p, q, r, p', q'$ et $r'$ les affixes respectives des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes.
2.a) Montrer que $p' = \dfrac{b-ic}{1-i}$ puis écrire $q'$ en fonction de $a$ et $c$ ; $r'$ en fonction de $a$ et $b$.
b) Calculer $p'+q'+r'$ en fonction de $a$, $b$ et $c$ puis en déduire que les triangles ABC et P'Q'R' ont le même centre de gravité G d'affixe $g$.
3. Exprimer chacun des complexes $p, q$ et $r$ en fonction de $a, b$ et $c$ puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

1) Construction :




2) a) Montrons que : $p' = \dfrac{b-ic}{1-i}$

$$\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{P'C};\overrightarrow{P'B}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \dfrac{P'B}{P'C} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b-p'}{c-p'} = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow \dfrac{b-p'}{c-p'} = i \Rightarrow b-p' = i(c-p')$

$\Rightarrow b-p' = ic - ip'$

$b - ic = p' - ip'$

$b - ic = p'(1-i)$

$\Rightarrow \boxed{p' = \dfrac{b-ic}{1-i}}$

Par analogie :

$\boxed{q' = \dfrac{c-ia}{1-i}}$ et $\boxed{r' = \dfrac{a-ib}{1-i}}$

b)

* $p'+q'+r' = \dfrac{b-ic+c-ia+a-ib}{1-i} = \dfrac{a+b+c\,(\cancel{1-i})}{\cancel{1-i}}$

$\Rightarrow \boxed{p'+q'+r' = a+b+c}$

* Soit : $G_1 = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$ $\quad G_2 = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} P' & Q' & R' \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$

$g_1 = \dfrac{a+b+c}{3}$ $\qquad g_2 = \dfrac{p'+q'+r'}{3} = \dfrac{a+b+c}{3} = g_1$

Donc les triangles ABC et P'Q'R' ont le même centre de gravité G.

①

3)
Le triangle CBP est rectangle isocèle en C :

$$\frac{p-c}{b-c}=i$$

$p-c=i(b-c)$

$p-c=ib-ic$

$\boxed{p=ib+c(1-i)}$

Par analogie :

$\boxed{q=ic+a(1-i)}$ $\boxed{r=ia+b(1-i)}$

Soit $G_3=\text{bar}\begin{array}{c|c|c} P & Q & R \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$

$$g_3=\frac{ib+c(1-i)+ic+a(1-i)+ia+b(1-i)}{3}$$

$$=\frac{\cancel{ib}+c-\cancel{ic}+\cancel{ic}+a-\cancel{ia}+\cancel{ia}+b-\cancel{ib}}{3}$$

$$=\frac{a+b+c}{3}=g_1$$

Donc les triangle ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

② 